EXERCICE N°5 : 20' 4 points

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}+1}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2°) a) Montrer que pour tout $x\in IR$: $f'(x)=\dfrac{-\sqrt{e^x}}{2\left(\sqrt{e^x}+1\right)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3°) a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in]0,1[$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$; $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$.

4°) a) Montrer que $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

5°) On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{e^{u_n}}+1}\end{cases}$, pour tout $n\in IN$.

a) Montrer que pour tout $n\ge0$: $0<u_n\le1$.

b) Montrer que pour tout $n\ge0$: $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n\ge0$: $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$.

d) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE N°6 : 20' 5 points

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x(1+\ln^2 x)}$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln^3(x)+\ln^2(x)+\ln(x)-1$

a) Prouver que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in]1{,}6;1{,}8[$

c) Préciser le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$

2°) a) Montrer que pout tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^2(1+\ln^2 x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C_f

c) On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites $x=1$, $x=e$ et $y=0$.

Prouver que $A=\dfrac{\ln 2}{2}$ (u.a).

Qarray.tn -Aya Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aya Blech- Qarray.tn